# العــــــد

## القوائم

<u>تعريف:</u> $E$ مجموعة منتهية ذات $n$ عنصرا و $p$ عدد طبيعي غير معدوم . نسمي قائمة ذات $p$ عنصرا من $E$ كل متتالية مرتبة $(a_1, a_2, ..., a_p)$ من $p$ عنصرا من $E$ .

عدد القوائم ذات $p$ عنصرا من المجموعة $E$ التي تشمل $n$ عنصرا هو $n^p$ .

## الترتيبات

<u>تعريف:</u> $E$ مجموعة ذات $n$ عنصرا و $p$ عدد طبيعي غير معدوم حيث $1 \leq p \leq n$ . نسمي ترتيبة $p$ عنصرا من $E$ كل قائمة ذات $p$ عنصرا بحيث تكون هذه العناصر متمايزة مثنى مثنى .

عدد الترتيبات لـ $p$ عنصرا من المجموعة $E$ التي تشمل $n$ عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يرمز له بـ $A_n^p$ والمعرف كما يلي :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)....(n-p+1)$$

## التبديلات

<u>تعريف:</u> نسمي تبديلة لمجموعة $E$ ذات $n$ عنصرا كل ترتيبة $n$ عنصرا من $E$ .

عدد التبديلات لمجموعة ذات $n$ عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يساوي : $n! = n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1$ .

العدد $n!$ يقرأ $n$ عاملي . نصطلح أن : $0! = 1$ و $1! = 1$ .

## التوفيقات

**تعريف:** $E$ مجموعة ذات $n$ عنصرا و $p$ عدد طبيعي حيث :
$0 \le p \le n$ . نسمي توفيقة ذات $p$ عنصرا من عناصر $E$ كل جزء من $E$ يشمل $p$ عنصرا .
عدد التوفيقات لـ $p$ عنصرا من مجموعة ذات $n$ عنصرا هو العدد الطبيعي الذي نرمز له بـ $C_n^p$ أو $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ وهو معرف كما يلي :

$C_n^p = 0$ إذا كان $n < p$ و $C_n^0 = 1$ و $C_n^n = 1$

$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ إذا كان $1 \le p \le n$ .

## خواص

من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ حيث $0 \le p \le n$ فإن :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

وإذا كان $(1 \le p \le n-1)$ فإن : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

## دستور ثنائي الحد

$x$ و $y$ عددين طبيعيين ، $n$ عدد طبيعي حيث $n \ge 1$ فإن :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p =$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

# الاحتمالات

نقوم بتجربة عشوائية حيث لايمكن أن نتنبأ بصفة مؤكدة أي نتيجة ستحقق فعلا ، رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

## مصطلحات

- تسمى مجموعة النتائج الممكنة بـ " مجموعة الإمكانيات "ويرمز لها بـ $\Omega$ . كل جزء من $\Omega$ يسمى بـ : " حادثة " .
المجموعة التي تحتوي عنصرا وحيد تسمى بالحادثة الأولية .
- $A$ حادثة ما ، يرمزبـ $\overline{A}$ للحادثة العكسية لـ $A$ وهي تحتوي كل عناصر $\Omega$ ماعدا عناصر $A$ .
ليكن $A$ و $B$ حدثان . نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة $A$ و $B$ وهي تحتوي العناصر المشتركة بين $A$ و $B$ . إذا تحقق $A$ و $B$ في آن واحد نقول بأن الحادثة $A \cap B$ قد تحققت . إذا كان $A \cap B = \varnothing$ نقول بأن الحادثتان $A$ و $B$ غير متلائمين .
نرمز بـ $A \cup B$ للحادثة $A$ أو $B$ وهي حادثة تحتوي عناصر $A$ و $B$ .
إذا تحقق إحدى الحادثتين $A$ أو $B$ أوهما معا نقول بأن الحادثة $A \cup B$ قد تحققت .
- الحادثة الأكيدة هي الحادثة المحققة .
- الحادثة المستحيلة هي الحادثة التي لا يمكن تحقيقها .

## قانون الاحتمال

ليكن $\Omega = \left\{a_1; a_2; ....; a_n\right\}$ مجموعة الإمكانيات( النتائج)لتجربة عشوائية . إذا ربطنا كل عنصر $a_i$ من $\Omega$ بعدد حقيقي موجب $p_i$ من المجال $[0;1]$ بحيث : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ نقول بأننا عرفنا احتمالا $p$ على $\Omega$. يسمى العدد $p_i$ احتمال الحادثة $a_i$ .

## احتمال حدث

احتمال الحادثة $A$ ويرمز له بـ $p(A)$ هو مجموع احتمالات كل عناصر $A$ .

ملاحظة : $p(\varnothing)=0$ , $p(\Omega)=1$

## خواص الاحتمالات

- من أجل كل حادثة $A$ فإن : $0 \le p(A) \le 1$
- من أجل كل حادثتين $A$ و $B$ فإن :

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$$

وإذا كانت الحادثتين $A$ و $B$ غير متلانمتين $p(A \cap B)=\varnothing$ فإن :

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)$$

- من أجل كل حادثة $A$ فإن : $p(A)=1-p(\overline{A})$ حيث $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة $A$ .
- إذا كانت الحادثة $A$ جزء من $B$ $(A \subset B)$ فإن : $p(A) \le p(B)$

## حساب الاحتمال

لتكن $\Omega=\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$ و $p$ احتمال معرف على $\Omega$. إذا كانت كل الحوادث الأولية $a_1,a_2,\ldots,a_n$ لها نفس الاحتمال فإن احتمال كل حادثة أولية هو : $p(a_i)=\frac{1}{n}$ ( $n$ عدد عناصر $\Omega$ ) .

احتمال الحادثة $A$ حيث $A$ جزء من $\Omega$ هو : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}$

حيث : عدد عناصر $A = CardA$ وعدد عناصر $\Omega = Card\Omega$

## الاحتمال الشرطي

**تعريف :** $A$ و $B$ حادثتان حيث $p(A) \neq 0$ .

احتمال الحادثة $B$ علما أن الحادثة $A$ محققة هو العدد $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

ونرمز له بـ : $p_A(B)$ أو $p(B/A)$ أي $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

**خاصية :**

$A$ و $B$ حادثتان بحيث $p(A) \neq 0$ و $p(B) \neq 0$ فإن :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

## دستور الاحتمالات الكلية

$\Omega$ مجموعة الإمكانيات . $A_1, A_2, ..., A_n$ أجزاء من $\Omega$ .

نقول بأن هذه الحوادث تشكل تجزئة للمجموعة $\Omega$ إذا كان :

- $A_i \neq \varnothing$ لكل $i$ بحيث : $1 \leq i \leq n$
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $i$ و $j$ بحيث $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ و $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

**خاصية :**

$A_1, A_2 ..., A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة $\Omega$ و $p$ احتمالا معرف على $\Omega$. من أجل كل حادثة $B$ لدينا :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B) =$$

$$= p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + p(A_2) \cdot p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)$$

تسمى هذه العلاقة بـ :" دستور الاحتمالات الكلية " .

## الحادثتان المستقلتان

نقول عن حادثتان $A$ و $B$ أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

### ملاحظات :

1) $A$ و $B$ حادثتان مستقلتان يعني أن وقوع الحادثة $A$ لا يتعلق بوقوع الحادثة $B$ والعكس صحيح .

2) إذا كان $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ فإن :

$$p_B(A)=p(A) \quad \text{و} \quad p_A(B)=p(B)$$

3) إذا كانت $A$ ، $B$ ، $C$ حوادث مستقلة فإن :

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C)$$

## الاحتمالات المركبة

$A$ و $B$ حادثتان بحيث $p(A)\neq 0$ فإن :

* $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$ .

بصفة عامة $A$ ، $B$ ، $C$ حوادث بحيث $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$

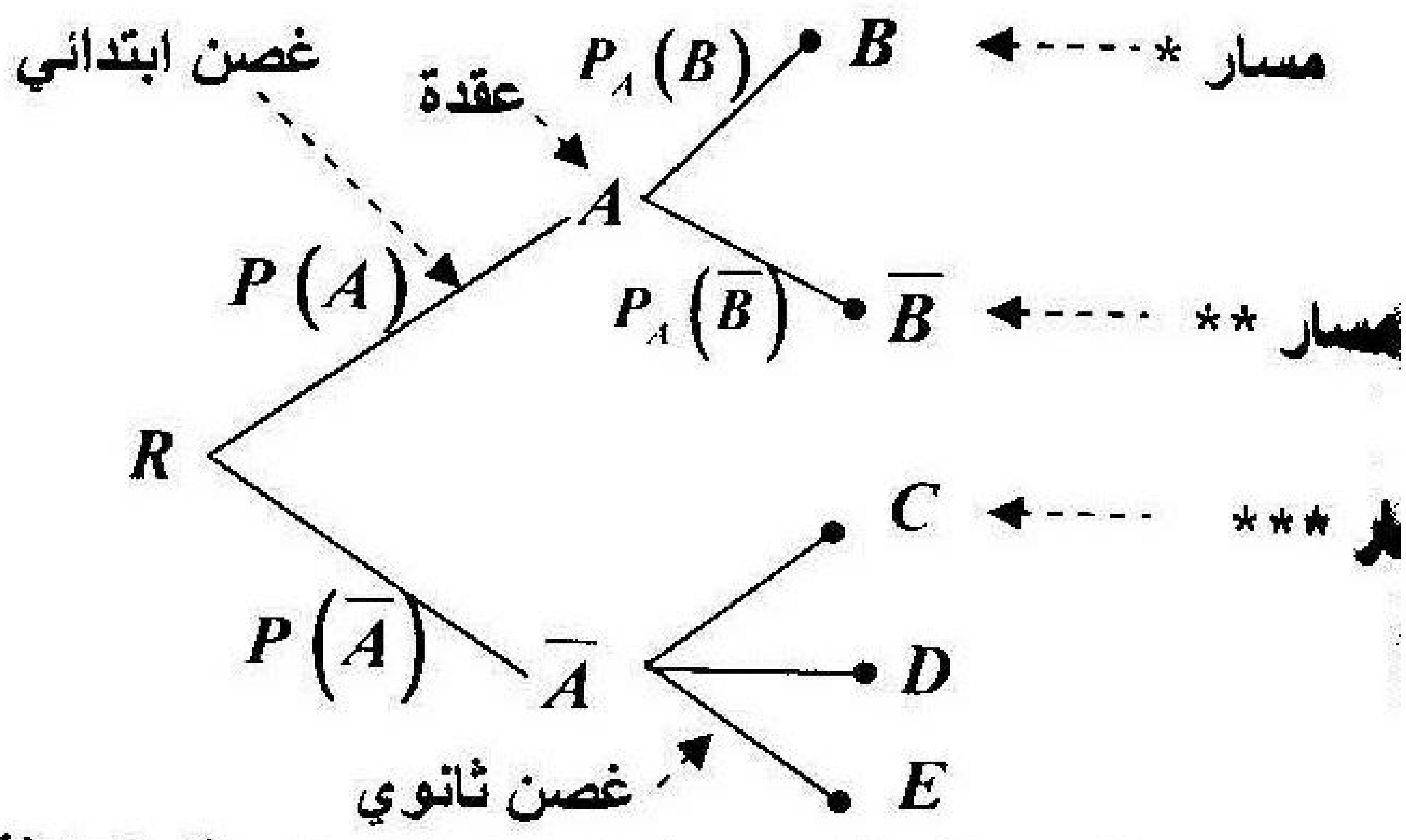
فإن : $p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p_A(B)\times p_{A\cap B}(C)$ .

تسمى العلاقة * مبدأ الاحتمالات المركبة ويمكن تمديدها إلى أكثر من حادثتين

## استعمال شجرة الاحتمالات

عندما نفهم من المعطيات أن هناك عدة تفريعات يستحسن تكوين الشجرة المناسبة لها (شجرة الاحتمالات) . ( أنظر الصفحة الموالية)

الغصن الابتدائي الأول يمثل الحادثة $A$ واحتمالها $p(A)$ ، والغصن الابتدائي الثاني يمثل الحادثة العكسية لـ $A$ أي $\overline{A}$ واحتمالها $p(\overline{A})$ .




الغصن الثانوي المنطلق من المنبع $A$ نحو $B$ يمثل الحادثة $B$ ولحساب احتمالها يجب اعتبار أن الحادثة $A$ قد وقعت( تحققت) إذن فهو الاحتمال الشرطي $p_A(B)$ وكذالك لحساب احتمال الحادثة $\overline{B}$ يجب حساب $p_A(\overline{B})$ وبنفس الطريقة نحسب احتمال الحوادث $E,D,C$ .

المسارهو مكون من عدة غصون متتابعة. مثلا :

المسار *: $R \to A \to B$ والمسار ** : $R \to A \to \overline{B}$

إذا كان من عقدة ما ينبع غصنين فقط( ابتدائيين أو ثانويين ) فيمكن اعتبارهما كحادثتان متعاكستان : $A$ و $\overline{A}$ ، $B$ و $\overline{B}$ ،' ...

لحساب الاحتمالات مستعملا الشجرة يجب معرفة القواعد الآتية:

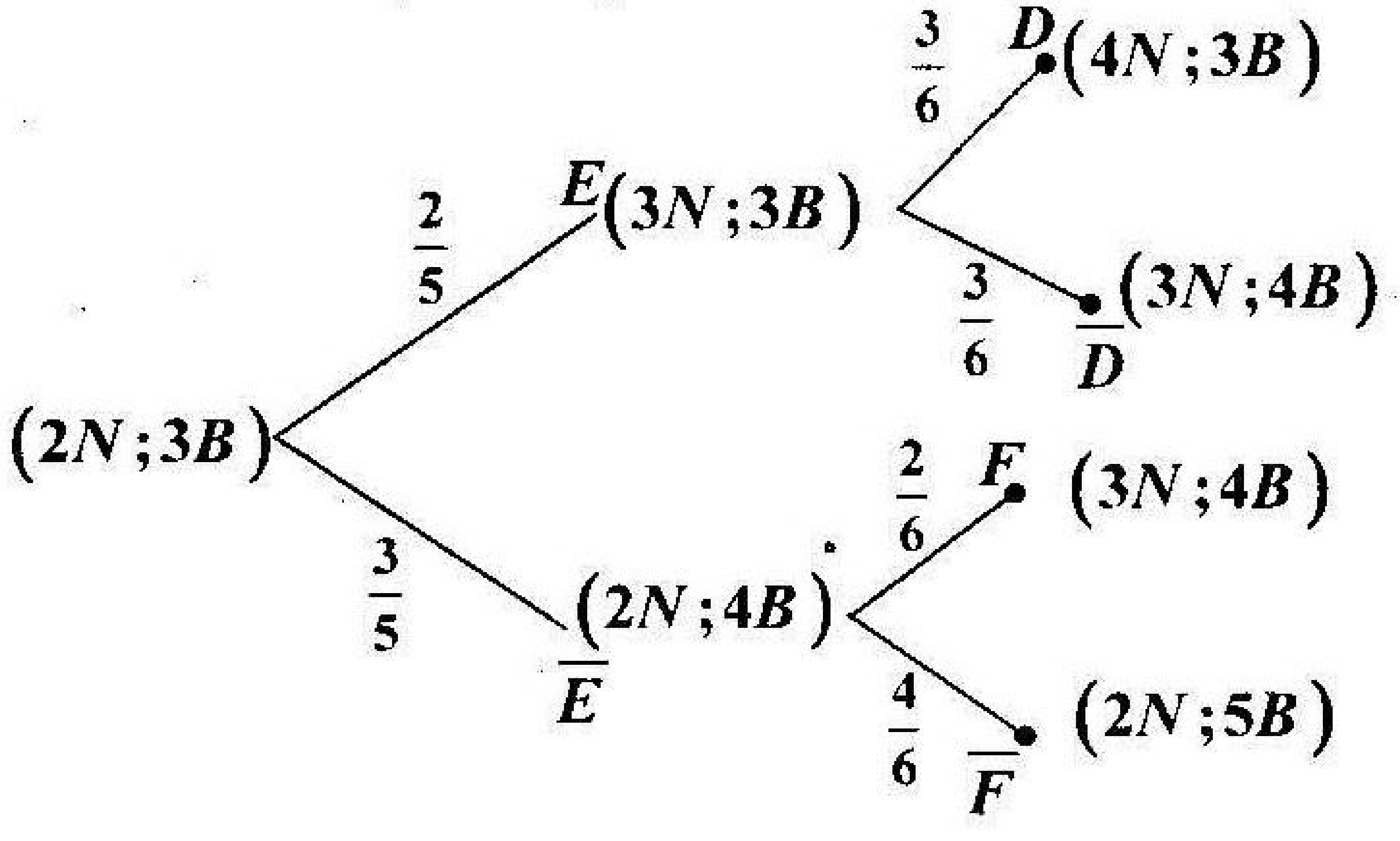
- مجموع احتمالات الغصون الابتدائية يساوي 1 .
- مجموع كل احتمالات الغصون الثانوية المنطلقة من نفس العقدة يساوي 1 .
- احتمال مسار ما ، هو جداء احتمالات الأغصان المؤدية إليه.
- لحساب احتمال حادثة ما نتبع المسارات المؤدية إليها عبر غصون الشجرة ويكون احتمال هذه الحادثة يساوي مجموع احتمالات هذه المسارات .

**مثال** :يحتوي صندوق على كرتين سوداء و 3 كرات بيضاء. نسحب عشوائيا كرة ثم نعيدها إلى الصندوق ونضيف معها كرة من نفس لون .
نقوم بسحب ثاني مشابها تماما للأول ونعتبر الحادثتين:
الحادثة A : يوجد في الصندوق 3 كرات سوداء قبل السحب الثالث .
الحادثةC : يوجد في الصندوق 5 كرات بيضاء قبل السحب الثالث .
احسب $p(A)$ و $p(C)$ .

## الحـــل

نرمز للكرة البيضاء بـ $B$ وللكرة السوداء بـ $N$ وللصندوق قبل السحب الأول بالثنائية $(2N;3B)$ . نعتبر الحادثة $E$ : سحب كرة سوداء في السحب الأول ومنه : $p(E)=\frac{2}{5}$ و $p(\overline{E})=\frac{3}{5}$

ولتكن الحادثتين $D$ و $F$ حيث الحادثة $D$ : سحب كرة سوداء في السحب الثاني من الصندوق $(3N;3B)$ و الحادثة $F$ : سحب كرة سوداء في السحب الثاني من الصندوق $(2N;4B)$ .



## التباين لمتغير عشوائي

التباين لمتغير عشوائي $X$ هو العدد :

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2\cdot p_i$ ويمكن كتابة التباين $V(X)$

على الشكل الآتي : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(E(X)\right)^2$

## الانحراف المعياري لمتغير عشوائي

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي $X$ هو : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

## قانون برنو لي

**تعريف** : نسمي تجربة برنو لي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين $S$ و $\overline{S}$ باحتمالين $p$ و $1-p$ على الترتيب .

قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ الذي يأخذ قيمتين فقط :

$(X=1)$ إذا تحقق المخرج $S$ أو $(X=0)$ إذا تحقق المخرج $\overline{S}$

يسمى قانون برنو لي .

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p(X=x)$ | $1-p$ | $p$ |

يسمى العدد $p$ وسيط المتغير العشوائي $X$ .

## خاصية

ليكن $X$ متغير عشوائي يتبع قانون برنولي بوسيط $p$ فإن :

- الأمل الرياضي للمتغير $X$ هو : $E(X)=p$

- التباين للمتغير $X$ هو : $V(X) = p(1-p)$

## مخطط برنولي - قانون الثنائي ( ثنائي الحد )

نعتبر تجربة برنولي ذات المخرجين $S$ ( النجاح ) و $E$ (الرسوب)
حيث $p(S) = p$ و $p(E) = 1-p$ .

عندما نكرر هذه التجربة $n$ مرة نحصل على مخطط برنولي .

- نعرف قانون الثنائي الذي وسيطاه $n$ و $p$ كما يلي :

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ مع } k \in \{0,1,...,n\}$$

ويمثل $p(X=k)$ احتمال الحصول على $k$ مرة المخرج $S$ عندما نكرر التجربة $n$ مرة مستقلة .

- نقول عن متغير عشوائي $X$ أنه يتبع قانون الثنائي بالوسيطين $n$ و $p$ إذا كان $X$ يأخذ كقيمة عدد مرات تحقق المخرج $S$ عند تكرار $n$ مرة تجربة برنولي .

- الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي $X$ الذي يتبع قانون الثنائي هما معرفان كما يلي :

$$E(X) = np \text{ و } V(X) = np(1-p)$$

## قوانين الاحتمالات المستمرة

### 1- الكثافة

<u>تعريف</u> : $f$ دالة معرفة على المجال $[a;b]$.

نقول بأن الدالة $f$ كثافة احتمال على المجال $[a;b]$ إذا تحقق الشروط الآتية : - $f$ مستمرة على المجال $[a;b]$

- $f(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \quad -$$

## المتغير العشوائي والدالة الكثافة

**تعريف:** $X$ متغير عشوائي معرف على المجال $[a;b]$ وقانون احتماله $p$ . نقول بأن المتغير العشوائي $X$ يقبل $f$ دالة كثافة احتمال إذا كان من أجل كل عددين $\alpha$ و $\beta$ من المجال $[a;b]$

لدينا : $p\left(X \in [\alpha;\beta]\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

## القانون الأسي

**تعريف:** نقول أن المتغير العشوائي $X$ يتبع القانون الأسي ذي الوسيط $\lambda$ إذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة $f$ المعرفة من أجل كل $x$ من المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

# بعض التوجيهات خاصة بالاحتمالات

## عدد الإمكانيات

- **السحب**

$\Omega$ المجموعة الشاملة تشمل $n$ عنصرا . نسحب عشوائيا $p$ عنصرا.

1- السحب في آن واحد : عدد الإمكانيات هو : $C_n^p$ $(p \leq n)$

2- السحب على التوالي :

أ- بدون إرجاع : عدد الإمكانيات هو : $A_n^p$ $(p \leq n)$

ب- بالرجع : عدد الإمكانيات هو : $n^p$

**اللجان والمكاتب**

$\Omega$ المجموعة الشاملة تشمل $n$ فردا، نختار عشوائيا لجنة تشمل $p$ فرد

أ- اللجان التي لايذكر فيها الوظيفة : عدد الإمكانيات هو : $C_n^p$

ب - اللجان التي يذكر فيها وظيفة الأعضاء (رئيس ، أمين ، ...)

عدد الإمكانيات هو : $A_n^p$

- **الرمي**

أ- رمي قطعة نقدية

إذا رمينا قطعة نقدية مرة واحدة فيكون لدينا احتمالين: الوجه $(F)$ أو الظهر $(P)$ وتكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_1 = \{P;F\}$.

إذا رمينا القطعة النقدية $n$ مرة وسجلنا بالترتيب الوجه الذي يظهر $(F)$ أو $(P)$ في كل مرة تكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_n = \Omega_1{}^n$

وعدد عناصرها هو $2^n$ وكل عنصر يحتوي $n$ حرفا $(F)$ و $(P)$

مثلا : $(P;P;F;P;...;F)$ ، $(F;P;F;P;...;P)$ .

ب - رمي نرد

إذا رمينا نرد الذي وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 فتكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6\}$ وإذا رمينا هذا النرد $n$ مرة وسجلنا بالترتيب الأرقام التي ظهرت على الوجه العلوي في كل رمية فتكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_n=\Omega_1{}^n$ وعدد عناصرها هو $6^n$ وكل عنصرا يكون مكون من $n$ رقما . مثلا : إذا رمينا نرد 3 مرات متتالية فيكون عدد الإمكانيات هو $6^3$ وكل عنصرا من مجموعة الإمكانيات يحتوي 3 أرقام

مثلا : $\{5;4;6\},.....$ , $\{3;1;2\}$ , $\{3;2;2\}$

## استعمال الحادثة العكسية في حساب الاحتمالات

إذا لحظنا أنه يمكن تجزئة مجموعة الإمكانيات إلى حادثتين وحادثتين فقط ، في هذه الحالة يمكن اعتبار إحدى الحادثتينA حادثة عكسية للأخرى ولحساب احتمال الحادثة $A$ نطبق القاعدة :

$$p(A)=1-p(\overline{A})$$

## الاحتمال الشرطي

يكون الاحتمال المطلوب احتمال شرطي إذا كان المفهوم اللغوي للجملة يوحي بأن هناك صيغة شرطية . نعبر غالبا عن الاحتمال الشرطي في التمارين بـ : علما أو شرطا أن الحادثة ... محققة .

## التجارب التي هي من نموذج برنولي

| طبيعة التجربة | نموذج برنولي $p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ |
|---|---|
| السحب على التوالي وبالرجع | إعادة السحب $n$ مرة بطريقة مستقلة |
| تجربة ما على فرد واحد | إعادة التجربة على $n$ فرد بطريقة مستقلة |
| رمي النرد أو القطعة | رمي $n$ مرة (النرد أو القطعة ) بطريقة مستقلة |
| رمي النرد أو القطعة | رمي $n$ نرد أو قطع في آن واحد |